

Vibrations d'un réseau ionique

P

(a) Les équations du mouvement sont : 4points

$$m\ddot{u}_{2n} = f(u_{2n+1} + u_{2n-1} - 2u_n) \quad 0.5$$

$$M\ddot{u}_{2n+1} = f(u_{2n+2} + u_{2n} - 2u_{2n+1}) \quad 0.5$$

Avec $u_{2n}(t) = A \exp[i(\omega t - 2nka)]$ et $u_{2n+1}(t) = B \exp[i(\omega t - (2n+1)ka)]$ on obtient le système d'équations linéaires homogènes en A et B :

$$(\omega^2 - \frac{2f}{m})A + (\frac{2f}{m} \cos ka)B = 0 \quad 0.5$$

$$(\frac{2f}{M} \cos ka)A + (\omega^2 - \frac{2f}{M})B = 0 \quad 0.5$$

Ce système admet une solution non triviale uniquement si le déterminant des coefficients est nul, ce qui correspond à :

$$(\omega^2 - \frac{2f}{m})(\omega^2 - \frac{2f}{M}) - (\frac{2f}{m} \cos ka)(\frac{2f}{M} \cos ka) = 0 \quad 0.5$$

$$\omega^4 - 2f(\frac{1}{m} + \frac{1}{M})\omega^2 + \frac{4f^2}{mM} \sin^2 ka = 0 \quad 0.5$$

On trouve les deux racines suivantes :

$$\omega^2 = f \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right) \pm f \sqrt{\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right)^2 - \frac{4}{mM} \sin^2 ka} \quad 1$$

qui correspondent aux deux branches de la relation de dispersion (branche acoustique : signe $-$, branche optique : signe $+$).

(b) La figure suivante montre $\omega(k)$. La relation de dispersion de la lumière est aussi représentée. Pour $k = 0$ on a :

$$\omega = 0 \quad \text{pour la branche acoustique;} \quad 1$$

$$\omega = \sqrt{2f(\frac{1}{m} + \frac{1}{M})} = \sqrt{\frac{2f}{\mu}} \quad \text{pour la branche optique;} \quad 1$$

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m} + \frac{1}{M} \quad \text{avec } \mu \text{ la masse réduite.}$$